ECE 1
2017 - 2018

CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON BONUS n^o 1

Exercice 1.

(1) (a) Les 3-codes sont :

$(\{1,2,3\})$, $(\{1\},\{2,3\})$, $(\{2\},\{1,3\})$, $(\{3\},\{1,2\})$, $(\{1,2\},\{3\})$, $(\{1,3\},\{2\})$, $(\{2,3\},\{1\})$,

$(\{1\},\{2\},\{3\})$, $(\{1\},\{3\},\{2\})$, $(\{2\},\{1\},\{3\})$, $(\{2\},\{3\},\{1\})$, $(\{3\},\{1\},\{2\})$, $(\{3\},\{2\},\{1\})$.

On compte 13 3-codes. On a donc

$$\boxed{c_3 = 13.}$$

(b) Si toutes les parties sont des singletons, alors le nombre de n-codes est le nombre de permutations de l'ensemble $\{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}$. Cet ensemble ayant n éléments, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{il y a } n! \ n\text{-codes où les boutons sont poussés successivement.}}$$

(c) Il y a n boutons et on les pousse par paire, il y a donc $\frac{n}{2}$ paires à former successivement.

Pour la première paire il y a $\binom{n}{2}$ façons de la choisir.

Pour la deuxième paire il y a $\binom{n-2}{2}$ façons de la choisir.

De même, avec $i \in \left[\!\left[1,\frac{n}{2}\right]\!\right]$, lorsque l'on forme la i-ème paire on a déjà choisi $2(i-1)$ boutons donc il y a $\binom{n-2(i-1)}{2}$ façons de choisir la i-ème paire.

Le nombre de n codes composés uniquement de paires est donc

$$\prod_{i=1}^{n/2}\binom{n-2(i-1)}{2} = \prod_{i=1}^{n/2}\frac{(n-2(i-1))!}{(n-2i)!2} = \frac{1}{2^{n/2}}\prod_{i=1}^{n/2}\frac{(n-2(i-1))!}{(n-2i)!} = \frac{1}{2^{n/2}}\frac{(n-2(1-1))!}{\left(n-2\frac{n}{2}\right)!} = \frac{1}{2^{n/2}}\frac{n!}{0!} = \frac{n!}{2^{n/2}}$$

$$\boxed{\text{Le nombre de } n\text{-codes où les boutons sont poussés par paire est } \frac{n!}{2^{n/2}}.}$$

(d) Soit un n-code composé de 2 parties P_1 et P_2. Choisir un tel n-code revient à choisir P_1, en effet une fois P_1 choisi on a $P_2 = E_n \backslash P_1$. De plus, le cardinal de P_1 est compris entre 1 (d'après l'énoncé) et $n-1$ (pour que P_2 soit non vide). Le nombre de n-codes composés de deux parties est donc le nombre de parties de E_n auquel on soustrait la partie à 0 élément et celle à n éléments. On a alors :

$$\boxed{\text{le nombre de } n \text{ codes composés de 2 parties est } 2^n - 2.}$$

<u>Remarque</u> : ce raisonnement fonctionne aussi pour $n = 1$, il n'y a pas besoin de faire une disjonction de cas.

(2) (a) Une fois les k éléments de P_1 fixés, il reste à former un $(n-k)$-code avec les $(n-k)$ nombres restant de E_n.

$$\boxed{\text{Le nombre de } n\text{-codes commençant par } P_1 \text{ est } c_{n-k}.}$$

(b) Il y a, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $\binom{n}{k}$ façons de choisir k éléments pour P_1. Une fois ces k éléments on a vu qu'il y a c_{n-k} n-codes commençant par ce P_1.
Ainsi, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, il y a $\binom{n}{k} c_{n-k}$ n-codes dont la première partie comporte k éléments.
De plus, il y a 1 n-code dont la première partie comporte n éléments : (E_n).
Finalement, on a obtenu :

$$c_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} c_{n-k} = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{n-p} c_p \qquad \text{changement d'indice } p = n-k$$

$$c_n = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} c_p = \binom{n}{0} c_0 + \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} c_p$$

On a ainsi obtenu que $\boxed{c_n = \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} c_p.}$

(c) Grâce à la formule de la question précédente on a :

$$c_2 = \binom{2}{0} c_0 + \binom{2}{1} c_1 = 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$$

$$c_3 = \binom{3}{0} c_0 + \binom{3}{1} c_1 + \binom{3}{2} c_2 = 1 \times 1 + 3 \times 1 + 3 \times 3 = 13$$

On a bien retrouvé que :

$$\boxed{c_2 = 3 \qquad \text{et} \qquad c_3 = 13.}$$

On a également

$$c_4 = \binom{4}{0} c_0 + \binom{4}{1} c_1 + \binom{4}{2} c_2 + \binom{4}{3} c_3 = 1 \times 1 + 4 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 13 = 75$$

$$c_5 = \binom{5}{0} c_0 + \binom{5}{1} c_1 + \binom{5}{2} c_2 + \binom{5}{3} c_3 + \binom{5}{4} c_4 = 1 \times 1 + 5 \times 1 + 10 \times 3 + 10 \times 13 + 5 \times 75 = 541.$$

On a obtenu que : $\boxed{c_4 = 75 \qquad \text{et} \qquad c_5 = 541.}$

Exercice 2.

(1) Il y a deux façons de résoudre cette question.

(a) *(En admettant le résultat concernant la somme des k^3)*. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2 - 1) = 2 \sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k = 2 \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \left(n(n+1) - 1 \right) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$$

On a donc bien obtenu que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \ \sum_{k=1}^{n} k(2k^2 - 1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.}$$

(b) Montrons pas récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

Tout d'abord, on a $1(2\times 1^2-1)=1$ et $\dfrac{1(1+1)(1+1-1)}{2}=1$ donc l'égalité est vraie pour $n=1$.
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, supposons que :

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2},$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(2k^2-1) &= \sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) + (n+1)(2(n+1)^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2} + (n+1)(2n^2+4n+1)\\ &= \frac{n+1}{2}\left(n(n^2+n-1)+2(2n^2+4n+1)\right) = \frac{n+1}{2}\left(n^3+5n^2+7n+2\right)\end{aligned}$$

De plus,

$$(n+2)\left((n+1)^2+n+1-1\right) = (n+2)(n^2+3n+1) = n^3+5n^2+7n+2,$$

Pour résumer, on a obtenu que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(2k^2-1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)((n+1)^2+(n+1)-1)}{2}.$$

L'égalité reste vraie au rang $n+1$.
On peut ainsi affirmer, d'après le principe de récurrence, que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.}$$

(2) Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Tout d'abord,

$$\forall x_1\in\mathbb{R},\ \prod_{k=1}^{1} e^{x_k} = e^{x_1} = \exp\left(\sum_{k=1}^{1} x_k\right),$$

donc l'égalité est vraie pour $n=1$.
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, supposons que :

$$\forall (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Soit $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$, on a alors

$$\prod_{k=1}^{n+1} e^{x_k} = \left(\prod_{k=1}^{n} e^{x_k}\right)e^{x_{n+1}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)e^{x_{n+1}} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right).$$

Ainsi l'égalité reste vraie au rang $n+1$.
On a obtenu, d'après le principe de récurrence, que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).}$$

Exercice 3.

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n-1}\left(4^{2-k}+5^k6^{n-k+1}\right) &= \sum_{k=2}^{n-1}4^{2-k}+\sum_{k=2}^{n-1}5^k6^{n-k+1} = 4^2\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^k+6^{n+1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^k\\
&= 4^2\frac{1}{4^2}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-2+1}}{1-\frac{1}{4}}+6^{n+1}\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1-2+1}}{1-\frac{5}{6}}\\
&= \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n-2}}\right)+6^{n+1}\left(\frac{5}{6}\right)^2 6\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right)\\
&= \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n-2}}\right)+6^n5^2\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right)\\
&= \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n-2}}\right)+25\left(6^n-6^25^{n-2}\right)\\
&= \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n-2}}\right)+25\times6^n-6^2\times5^n
\end{aligned}$$

On a obtenu que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3,\ \sum_{k=2}^{n-1}\left(4^{2-k}+5^k6^{n-k+1}\right) = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n-2}}\right)+25\times6^n-36\times5^n}$$

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n+1}2^{3k+2}\binom{n}{k-1} &= \sum_{i=2}^{n}2^{3i+5}\binom{n}{i} \qquad \text{changement d'indice } i = k-1\\
&= 2^5\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{i}8^i\\
&= 2^5\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{i}8^i1^{n-i}-\binom{n}{0}8^0-\binom{n}{1}8^1\right)\\
&= 2^5\left((8+1)^n-1-8n\right)
\end{aligned}$$

Pour conclure,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \sum_{k=3}^{n+1}2^{3k+2}\binom{n}{k-1} = 32\left(9^n-8n-1\right)}$$

Exercice 4.

(1) On remarque que $c-a = \dfrac{b-a}{2}$, or $b > a$ donc $c-a > 0$. De même, $c-b = \dfrac{a-b}{2}$ donc $c-b < 0$. Ainsi, on a bien $a < c < b$.
Montrons que c est rationnel. a et b sont rationnels donc

$$\exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ \exists (p,q) \in \left(\mathbb{N}^\star\right)^2,\ a = \frac{x}{p},\ b = \frac{y}{q}.$$

On a alors

$$c = \frac{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}}{2} = \frac{\frac{xq+yp}{pq}}{2} = \frac{xq+yp}{2pq}.$$

Or $(xq+yp) \in \mathbb{Z}$ et $2pq \in \mathbb{N}^\star$, donc $c \in \mathbb{Q}$. On a bien montré que

$$\boxed{c \text{ est un rationnel vérifiant } a < c < b.}$$

(2) Montrons par l'absurde qu'il n'existe pas de plus petit rationnel strictement supérieur à 1. Supposons donc qu'il existe un plus petit rationnel strictement supérieur à 1, notons le α.
Soit $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2}$. D'après la question (1), on a alors $\beta \in \mathbb{Q}$ et $1 < \beta < \alpha$. Ainsi, β est un rationnel à la fois strictement supérieur à 1 et strictement inférieur à α, ce qui est absurde par définition de α.
On peut bien affirmer que :

$$\boxed{\text{il n'existe pas de plus petit rationnel strictement supérieur à 1.}}$$

Exercice 5.
Montrons par récurrence sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Tout d'abord, $\displaystyle\prod_{k=1}^{1} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$ et $\dfrac{2^2(1!)^2}{3!} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, supposons que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k+1} &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}\right) \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{2(n+1)}{2n+3} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{2(n+1)}{2n+3}\,\frac{2n+2}{2n+2}\\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2 2^2(n+1)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}\end{aligned}$$

et l'égalité reste vraie au rang $n+1$. On a finalement obtenu, d'après le principe de récurrence, que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

<u>Variante :</u>
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on remarque que :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} = \frac{2^n \prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} = \frac{2^n n!}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}.$$

Écrivons plus simplement le dénominateur. On voit qu'il est composé uniquement des termes impairs de 1 à $2n+1$, on peut faire apparaître les termes pairs ainsi :

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n+1) = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times (2n) \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

On obtient finalement, puisque $(2^n n!)(2^n n!) = 2^{2n}(n!)^2$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

Exercice 6.

(1) (a) Montrons directement que $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\cup C)$ en utilisant la définition. Premièrement :

$$(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash B)\bigcap\overline{C} = (A\bigcap\overline{B})\bigcap\overline{C} = A\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}.$$

D'un autre côté :

$$A\backslash(B\bigcup C) = A\bigcap(\overline{B\bigcup C}) = A\bigcap(\overline{B}\bigcap\overline{C}) = A\bigcap\overline{B}\bigcap\overline{C}.$$

On a donc bien

$$\boxed{(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\bigcup C).}$$

(b) Montrons cette égalité par double inclusion.

- Soit $x\in(A\backslash B)\backslash C$. $x\in(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash B)\cap\overline{C}$ donc $x\in A\backslash B = A\cap\overline{B}$ et $x\in A$. De plus, $x\in(A\backslash B)\cap\overline{C}$ donc $x\in\overline{C}$ et $x\in A\cap\overline{B}$ donc $x\in\overline{B}$. Ainsi, $x\in\overline{B}\cap\overline{C}$ autrement dit $x\in\overline{B\cup C}$.
  Finalement, on a obtenu que $x\in A\bigcap(\overline{B\cup C}) = A\backslash(B\cup C)$. On a donc
  $$(A\backslash B)\backslash C\subset A\backslash(B\bigcup C).$$
- Soit $y\in A\backslash(B\cup C)$. $y\in A\cap(\overline{B\cup C}) = A\cap(\overline{B}\cap\overline{C})$ donc $y\in A$ et $y\in\overline{B}$ autrement dit $y\in A\cap\overline{B} = A\backslash B$. De plus $y\in\overline{C}$ donc $y\in(A\backslash B)\cap\overline{C} = (A\backslash B)\backslash C$. Ainsi, on a obtenu que
  $$A\backslash(B\bigcup C)\subset(A\backslash B)\backslash C.$$
  Par double implication on peut affirmer que
  $$\boxed{(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\bigcup C).}$$

(2) (a) Passons par la définition pour démontrer l'égalité souhaitée.
On a $(A\backslash B)\cap C = A\cap\overline{B}\cap C$ et

$$\begin{aligned}(A\bigcap C)\backslash(B\bigcap C) &= (A\bigcap C)\bigcap(\overline{B\bigcap C}) = (A\bigcap C)\bigcap(\overline{B}\bigcup\overline{C})\\ &= (A\bigcap C\bigcap\overline{B})\bigcup(A\bigcap C\bigcap\overline{C}) = (A\bigcap\overline{B}\bigcap C)\bigcup(A\bigcap\varnothing)\\ &= (A\bigcap\overline{B}\bigcap C)\bigcup\varnothing = A\bigcap\overline{B}\bigcap C\end{aligned}$$

On a donc bien obtenu que :

$$\boxed{(A\backslash B)\bigcap C = (A\bigcap C)\backslash(B\bigcap C).}$$

(b) Raisonnons par double inclusion.

- Soit $x\in(A\backslash B)\cap C$. $x\in A\backslash B = A\cap\overline{B}$ donc $x\in A$, de plus $x\in C$ donc $x\in A\cap C$. Ensuite, $x\in A\cap\overline{B}$ donc $x\in\overline{B}$ et ainsi $x\in\overline{B}\cup\overline{C} = \overline{B\cap C}$. On a ainsi obtenu que :
  $$(A\backslash B)\bigcap C\subset(A\bigcap C)\backslash(B\bigcap C).$$
- Soit $y\in(A\cap C)\backslash(B\cap C)$. $y\in A\cap C$ donc $y\in A$ et $y\in C$.
  De plus $y\in\overline{B\cap C} = \overline{B}\cup\overline{C}$, or $y\in C$ donc $y\notin\overline{C}$, ainsi $y\in\overline{B}$.
  Ensuite, $y\in A$ et $y\in\overline{B}$ donc $y\in A\backslash B$; et $y\in C$ donc $y\in(A\backslash B)\cap C$. On peut affirmer que :
  $$(A\bigcap C)\backslash(B\bigcap C)\subset(A\backslash B)\bigcap C.$$
  Finalement on a, par double inclusion,
  $$\boxed{(A\backslash B)\bigcap C = (A\bigcap C)\backslash(B\bigcap C).}$$